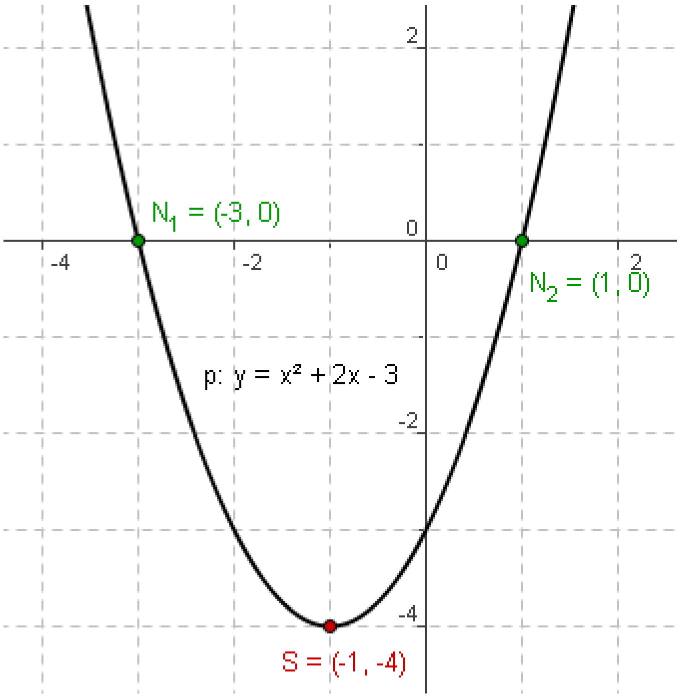
www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

*kleiner*$^{mini}$ *Exkurs*

# „quadratische Funktionen"

**Teil I:** Theoretische Grundlagen




V1.11

fred Hemmelmayr

Mai 2016

**fred Hemmelmayr**
**selbständiger Privatlehrer**

„Die Erfahrung lehrt uns, dass Praxis alles ist!“

**www.nachhilfe-fred.at**
**Weigunystr.3 - 4040 Linz**
**office@nachhilfe-fred.at**
**0650 84 94 552**

Mathematik ist aufbauend. Wer in früheren Semestern relativ gut mitgekommen ist und auch aufgepasst hat, der wird sich mit dieser Thematik (aber mit jeder weiteren neuen Thematik, die noch auf ihn zukommen wird) nicht schwer tun.

## Was ist eine quadratische Funktion?

Eine quadratische Funktion liegt dann vor, sobald die Variable der Funktionsgleichung in der 2. Potenz vorkommt. Da die Variable in der 2. Potenz vorkommt, besitzt das Polynom auch maximal 2 Nullstellen. Dazu noch später.

Zum Beispiel: $f_{(x)} = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$

$x$.............................. Variable bzw. ein beliebig veränderbarer Wert
$\frac{1}{3}, 2\ u. -3$ ................. Konstanten bzw. fixer und unveränderbarer Wert

In der Naturwissenschaft, Wirtschaftsmathematik und natürlich in der Technik kommen quadratische Funktionen oft vor. So lassen sich zum Beispiel Wurfbewegungen oder die Flugbahn eines Projektils mit quadratischen Funktionen darstellen.

Praktisch ist der Graph jeder quadratischen Funktion (auch ***„Polynom 2. Grades“*** genannt) immer eine Parabel (s. Titelbild!), wobei die Konstanten die Lage und die Form der Parabel maßgeblich beeinflussen.

Die ***allgemeine Form*** (abc-Form) lautet:

$$f_{(x)} = ax^2 + bx + c$$

Die Konstanten ***a***,***b***, u. ***c*** sind reelle Zahlen ($\mathbb{R}$).

Die Konstante ***a*** dehnt oder staucht die Parabel, die Konstante ***c*** verschiebt die Parabel nach oben oder nach unten (wie etwa das ***d*** bei der linearen Funktion) und die Konstante ***b*** verschiebt die Parabel im Koordinatensystem nach links oder nach rechts. Wenn also in einer quadratischen Funktion kein Ausdruck bx vorkommt, so ist die Parabel immer symmetrisch bezüglich der Y-Achse.

Bei den quadratischen Funktionen gibt es auch noch die ***Normalform*** (pq-Form):

$$f_{(x)} = x^2 + px + q$$

Die Konstanten ***p***, u. ***q*** sind ebenfalls reelle Zahlen ($\mathbb{R}$).

Wobei natürlich gilt: $ax^2 + bx + c = x^2 + px + q$. Dividiert man den Linksterm durch die Konstante **a**, so erhält man: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$. Man erkennt somit, dass der Ausdruck: $\boldsymbol{\frac{b}{a} = p}$ bzw. der Ausdruck $\boldsymbol{\frac{c}{a}}$ der Variable ***q*** entspricht. D.h.: Es lässt sich jede ***abc-Form*** sofort in eine ***pq-Form*** umwandeln, indem man die Gleichung der ***abc-Form*** einfach durch die Variable ***a*** dividiert.

***<u>Beispiel:</u>*** $f_{(x)} = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$ . Es liegt hier die ***abc-Form*** vor, wobei *a=*$\frac{1}{3}$, *b=2* u. *c=-3* ist.

$f_{(x)} = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 \mid / \frac{1}{3}$ (bzw. Multiplikation mit 3) $\Longrightarrow f_{(x)} = x^2 + 6x - 9$ wobei nun ***p*** den Wert 6 und ***q*** den Wert -9 aufweisen.

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Was uns natürlich interessiert, wie man quadratische Gleichungen nun lösen kann, bzw. was eine Lösung überhaupt aussagt?

Wenn man eine quadratische Gleichung in $\mathbb{R}$ löst, so berechnet man die Nullstellen dieser Funktion. Das ist alles.

Bei der Nullstelle gilt: $f_{(x)} = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + px + q$ bzw. $0 = ax^2 + bx + c$

Dabei gibt es speziell 2 Lösungsformeln:

Lösungsformel für die ***allgemeine Form***:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösungsformel für die ***Normalform***:

$$x_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diese beiden Lösungsformeln muss man sich merken!

***Beispiel:*** Die Funktion $f_{(x)} = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$ ist in $\mathbb{R}$ zu lösen!

***Anm.:*** Wir können jede quadratische Gleichung entweder mit der ***allgemeinen Form*** oder mit der ***Normalform*** lösen!

Lösungsweg: ***allgemeine Form***:

Zuerst lesen wir die Konstanten heraus:
*a*=$\frac{1}{3}$, *b=2* u. *c=-3* und setzen sie in die Lösungsformel der ***allgemeinen Form*** ein:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot\frac{1}{3}(-3)}}{2\cdot\frac{1}{3}} =$$

**Tipp:** zuerst den Ausdruck in der Wurzel (auch ***Diskriminante D*** genannt) vereinfachen!

$D = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) = 8$ bzw. $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{\frac{2}{3}}$

Das sieht viel schöner und übersichtlicher aus!

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{\frac{2}{3}} = 1{,}24$ bzw. $x_2 = \frac{-2-\sqrt{8}}{\frac{2}{3}} = -7{,}24$

Lösungsweg: ***Normalform***:

Zuerst müssen wir ***p*** und ***q*** bestimmen, indem wir die Gleichung einfach durch $\frac{1}{3}$ dividieren: ***p=*** 6 und ***q=*** -9 aufweisen.

Dann setzen wir in die Lösungsformel für die ***Normalform*** ein:

$$x_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\left(\frac{6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-9)}$$

$D = \frac{36}{4}+9=18$

$x_{1,2} = -(3) \pm \sqrt{18}$ bzw. $x_{1,2} = -3 \pm 4{,}24$

$x_1 = -3 + 4{,}24 = 1{,}24$ bzw. $x_2 = -3 - 4{,}24 = -7{,}24$

Die Funktion besitzt somit die Nullstellen: $\boldsymbol{N_1(1,24/0)}$ und $\boldsymbol{N_2(-7,24/0)}$.

Mit welchen von diesen Varianten man rechnet, ist einem selber überlassen.

**Tipp:** Wenn man daheim arbeitet, so kann man im Internet zur Überprüfung zum Beispiel unter: [http://www.jetzt-rechnen.de/Mathematik/p-q-Formel.html#](http://www.jetzt-rechnen.de/Mathematik/p-q-Formel.html#) Werte für ***p*** und ***q*** einsetzen. Man erhält somit sofort ein Ergebnis!

**www.nachhilfe-fred.at**
**Weigunystr.3 - 4040 Linz**
**office@nachhilfe-fred.at**
**0650 84 94 552**

Wenn wir uns diese Funktion (egal, ob ***abc-*** oder ***pq-Form***) grafisch ansehen (zum Beispiel durch Erstellen einer Wertetabelle), so können wir sofort die Lösung dort ablesen. Was auf den ersten Weg etwas aufwendig erscheint, wird sich vor allem noch in den Späteren Jahren der Mathematik (Kurvendiskussion, Integralrechnung, usw.) äußerst bezahlt machen. Man tut gut, die grafische Darstellung von Polynomen fleißig zu üben und zu verstehen! Das wird sich 100- fältig bezahlt machen!

Man bedenke auch: Ein Bild sagt immer mehr als tausend Worte! In der mathematischen Sprache ausgedrückt:

## Ein Graph od. Skizze sagen mehr als tausend Funktionsgleichungen!

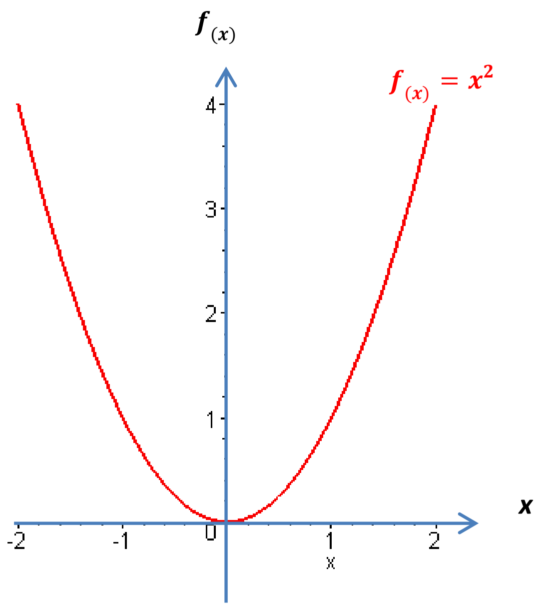
Hierin liegt ein großes Geheimnis verborgen. Wenn wir anfangen, in Graphen zu denken und Skizzen zu zeichnen, so werden wir uns bei der Lösung von jeglichen Problemstellungen wesentlich leichter tun! Das betrifft alle naturwissenschaftlichen und technischen Gegenstände. Alle Funktionen lassen sich grafisch darstellen und dadurch wesentlich leichter lösen!

**Daher hole ich an dieser Stelle (weil es so wichtig ist) etwas aus:**
Wir haben erfahren, dass jede quadratische Funktion eine Parabel ist. Konzentrieren wir uns einfach einmal auf folgende Funktion $\boldsymbol{f_{(x)} = x^2}$ bzw. der ***Grundparabel*** und überlegen uns mit Hilfe der Wertetabelle, wie diese Funktion aussieht:

**Tipp:** als Intervall fährt man gut, wenn man folgendes anpeilt: [-4;4]. Wenn man durch Einsetzen der beliebig wählbaren Variable ***x*** jedoch erkennt, dass man zu hohe oder zu kleine Zahlenwerte als Ergebnis =($f_{(x)}$ bzw. y − Wert) erhalten, so kann man durch Ausprobieren die Intervallgrenzen selber beliebig verändern! Sinnvoll sind Werte, die sich grafisch gut darstellen lassen.

| **Wertetabelle für:** $f_{(x)} = x^2$ | |
|---|---|
| **Variable: *x*** | **zugehöriger y − Wert bzw.** $\boldsymbol{f_{(x)}}$ |
| -4 | $f_{(-4)} = (-4)^2 = 16$ |
| -3 | $f_{(-3)} = (-3)^2 = 9$ |
| -2 | $f_{(-2)} = (-2)^2 = 4$ |
| -1 | $f_{(-1)} = (-1)^2 = 1$ |
| 0 | $f_{(0)} = (0)^2 = 0$ **Nullstelle!** |
| 1 | $f_{(1)} = (1)^2 = 1$ |
| 2 | $f_{(2)} = (2)^2 = 4$ |
| 3 | $f_{(3)} = (3)^2 = 9$ |
| 4 | $f_{(4)} = (4)^2 = 16$ |

Graph:

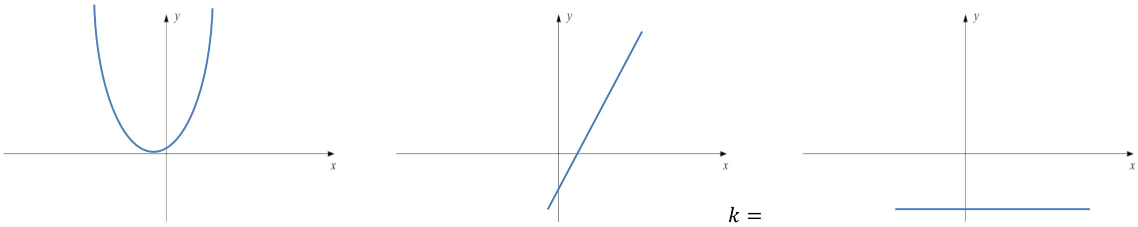



Die Nullstelle(n) bzw. die Lösung der Funktion sieht man sofort im Graphen und auch in der Wertetabelle bzw. dort wurde er bereits schon ausgerechnet.

Sie lautet in unserem Falle: ***N(0/0)***. Hier haben wir einen Spezialfall, nämlich eine so genannte ***Doppelnullstelle***, wo gilt: $\boldsymbol{x_1 = x_2}$. Dazu noch später.

Nun sehen wir uns unseren Graphen aus obigem Beispiel an: $f_{(x)} = x^2 + 6x - 9$. Bevor wir aber wie wild drauf losrechnen, überlegen wir erst einmal. Wir wollen verstehen lernen, warum das so ist. Sehen wir uns daher dieses Polynom doch einmal etwas genauer an. Da erkennen wir im Grunde genommen darin drei zusammengesetzte Funktionen, nämlich unsere ***Grundparabel:*** $f_{(x)} = x^2$, eine ***lineare Funktion***: $f_{(x)} = 6x$ sowie eine ***konstante***: $f_{(x)} = -9$. Unsere Funktion ist somit die Summe aus diesen drei Funktionen: ***Stammparabel*** + ***lineare Funktion*** + ***konstante***.

***Grundparabel:*** $f_{(x)} = x^2$ ***lineare Funktion***: $f_{(x)} = 6x$ ***konstante Funktion***: $f_{(x)} = -9$



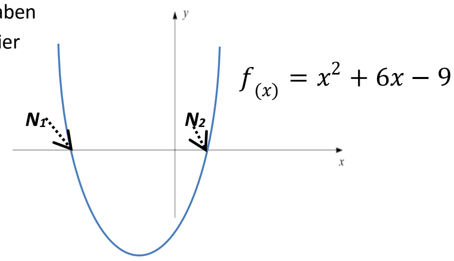
$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$

$d = -9$

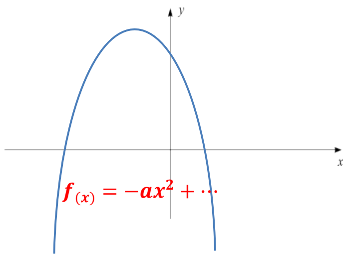
Wir erkennen hier deutlich der Skizzen, dass der Wert ***d*** der Variablen ***q*** entspricht und die Steigung ***k*** entspricht dem ***p***!

Die Skizze der eigentlichen Funktion erhalten wir durch Addition der obigen drei Funktionen:

Die Nullstellen $\boldsymbol{N_1(1,24/0)}$ und $\boldsymbol{N_2(-7,24/0)}$ haben wir bereits rechnerisch ermittelt. Wir können sie hier aber mit Hilfe der Skizze auch gut ablesen.



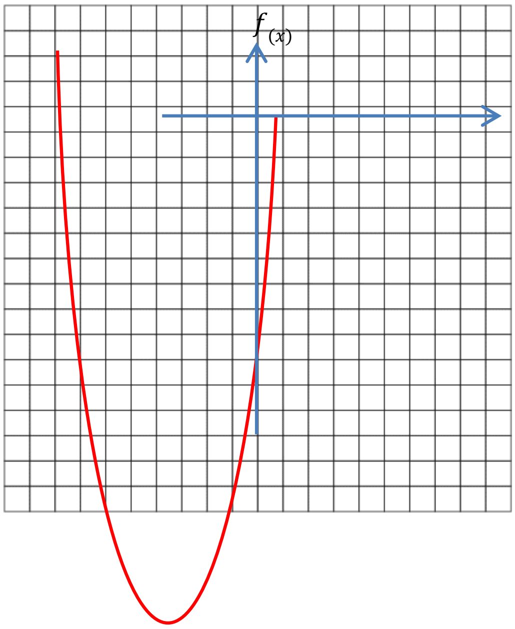

**Übrigens:** Hätte das Polynom ein Minus vor dem quadratischen Ausdruck, so würde die Parabel auf dem Kopf stehen (s. Skizze ganz rechts nebenan!)!




Soweit endet hier vorerst unser kleiner und notwendiger Einschub zum Thema. Wir kehren wieder mit diesem neu gewonnenen Hintergrundwissen zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück:

| **Wertetabelle für:** $f_{(x)} = x^2 + 6x - 9$ | |
|---|---|
| **Variable:** ***x*** | **zugehöriger y – Wert bzw.** $f_{(x)}$ |
| -4 | $f_{(-4)} = (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 9 = -17$ |
| -3 | $f_{(-3)} = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 9 = -18$ |
| -2 | $f_{(-2)} = (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 9 = -17$ |
| -1 | $f_{(-1)} = (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 9 = -14$ |
| 0 | $f_{(0)} = (0)^2 + 6 \cdot (0) - 9 = -9$ |
| 1 | $f_{(1)} = (1)^2 + 6 \cdot (1) - 9 = -2$ |
| 2 | $f_{(2)} = (2)^2 + 6 \cdot (2) - 9 = 7$ |
| 3 | $f_{(3)} = (3)^2 + 6 \cdot (3) - 9 = 18$ |
| 4 | $f_{(4)} = (4)^2 + 6 \cdot (4) - 9 = 31$ |
| -5 | $f_{(-52)} = (-5)^2 + 6 \cdot (-5) - 9 = -14$ |

Graph:



**fred Hemmelmayr**
**selbständiger Privatlehrer**

„Die Erfahrung lehrt uns, dass Praxis alles ist!“

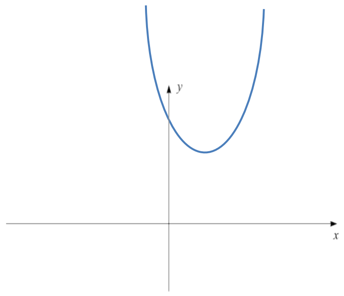
**www.nachhilfe-fred.at**
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Übung macht den Meister – und dennoch: Verrechnen wird man sich immer wieder, wobei das Verrechnen nicht so schlimm ist. Wichtig ist das Begreifen!

Was uns noch beschäftigt, sind drei Dinge:

1. Die Nullstellen bzw. die Lösungen
2. Beispiele, an denen man nicht sogleich die Variablen (***a***, ***b***, ***c***, ***p*** u. ***q***) herauslesen kann
3. Berechnung der Extremstelle (Scheitel)

**ad 1:**
Was ist, wenn der Graph der Funktion, wie nebenan skizziert aussehen würde? Der Graph – wie man an der Skizze ja so schön sieht – besitzt hier ***keine*** Schnittpunkte mit der x-Achse, was bedeutet, dass er keine Nullstellen hat.



Da kommen wir wieder zurück du unserer ***Diskriminante D***. Ich hoffe, dass niemand von euch die ***Diskriminante „diskriminiert“*** bzw. schon wieder vergessen hat!

***Beispiel:*** $f_{(x)} = x^2 + x + 4$ ; ***p*=1** u. ***q*=4**

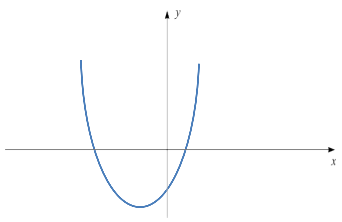
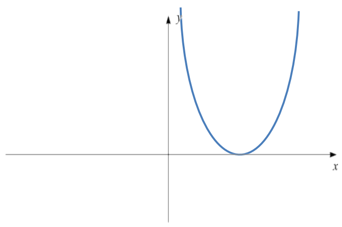
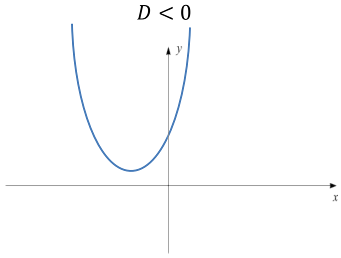
$x_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\left(\frac{1}{2}\right) \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (4)}$ bzw. $D = \frac{1}{4} - 4$ =-3,75 ⇒ $x_{1,2} = -(0{,}5) \pm\sqrt{-3{,}75}$

Wie wir bereits in früheren Semestern gelernt haben (sofern du aufgepasst hast!), wissen wir, dass man aus einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen kann. Wir erhalten dann eine nicht reelle Lösung bzw. eine so genannte ***komplexe Zahl***.

Darum tut man gut daran, sich vorab die ***Diskriminante*** anzusehen bzw. sich diese gleich auszurechnen.

Die ***Doppelnullstelle*** erkennt man sofort daran, wenn die ***Diskriminante*** genau 0 ist!

**Halten wir noch einmal fest:**

| $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| *2 Lösungen* | *Doppelnullstelle* | *keine Lösung* |
| $D > 0 \Rightarrow L = \{x_1; x_2\}$<br>$x_1$ u. $x_2 \in \mathbb{R}$ | $D = 0 \Rightarrow L = \{x_1 = x_2\}$<br>$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ | $D < 0 \Rightarrow L = \{\}$ |

**ad 2:**
Wenn wir zum Beispiel folgende Gleichung hätten: $\frac{2}{(2x-4)\cdot x} = -2$, so müssen wir mit den bereits (aus vergangenen Semestern) erlernten Werkzeugen diese Gleichung so umformen, dass auf einer Seite 0 steht:

$$\Rightarrow 2 = -2 \cdot (2x - 4) \cdot x = -(4x + 8) \cdot x = -4x^2 + 8x \Rightarrow \cdots \Rightarrow 0 = 2x^2 + 4x + 1$$

Dann geht es direkt mit der ***abc-*** oder ***pq-Formel*** weiter…

…froh und heiter…

**ad 3:**

Bedienen wir uns einfach der Funktion aus (ad 2): $f_{(x)} = 2x^2 + 4x + 1$ und wir möchten nun die Extremstelle ermitteln. Dazu lernt man verschiedene Möglichkeiten, die aber eher kompliziert sind bzw. und nicht immer funktionieren.

Ich zeige euch eine universell gültige Methode:

Die x-Koordinate des Scheitels (wir nennen sie einfach $x_s$) lässt sich immer mit der Formel:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

berechnen. Wenn ihr dann in höheren Semestern mit der Differenzialrechnung (grob gesagt bedeutet das Differenzieren die Steigung der Tangente einer Funktion ermitteln) loslegt, so kann diese Formel sehr leicht hergeleitet werden.

Unsere x-Koordinate des Scheitels lässt sich somit ganz schnell und einfach berechnen, indem wir die Konstanten a und b aus unserer quadratischen Funktion (abc- Form muss vorliegen) ermitteln und in unsere Formel einsetzen: $x_s = -\frac{4}{2.2} = -1$.

Die y- Koordinate des Scheitels (wir nennen sie einfach $y_s$) lässt sich nun ganz leicht ermitteln, indem wir den berechneten Wert für $x_s$ einfach in die Funktion einsetzen: $f_{(-1)} = 2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1$.

Der Scheitel besitzt also die Koordinaten: **S(-1/-1)**.

Natürlich fragst du dich vermutlich, wozu du diesen ganzen Scheiß überhaupt lernen solltest. Das ist eine durchaus berechtigte Frage, auf die man aber aufgrund unseres weltfremden Schulsystems keine vernünftige Antwort erwarten kann, doch quadratische Funktionen finden sehr wohl einen hohen praktischen Nutzen, sowohl in der Naturwissenschaft (zum Beispiel die Wurfbewegungen) als auch in der Technik (Modellierungen von Brücken-bögen,…). Im 2. Teil geht es dann um solche praktischen Anwendungen.

Soweit, so gut so kommen wir zum finis dieser Materie.



**Zum Autor: fred Hemmelmayr arbeitet seit 1992 im Trainings- Unterrichts- u. Lehrbereich. Er ist selbständig tätig und publiziert Artikel aus den Bereichen Naturwissenschaft, Mathematik, Technik, EDV sowie gesellschaftskritische Schriften, Artikeln und Satiren.**