www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

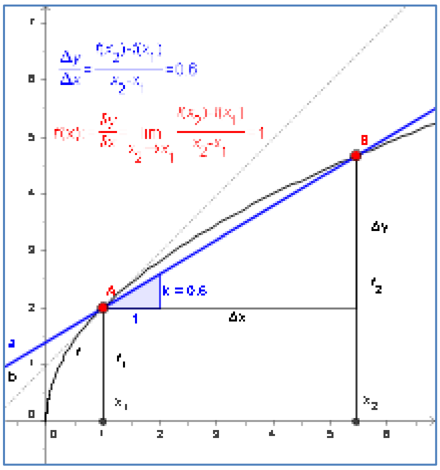
Kleiner

EXKURS

Zur

Differenzial-rechnung

Version 1.31 24.05.2013

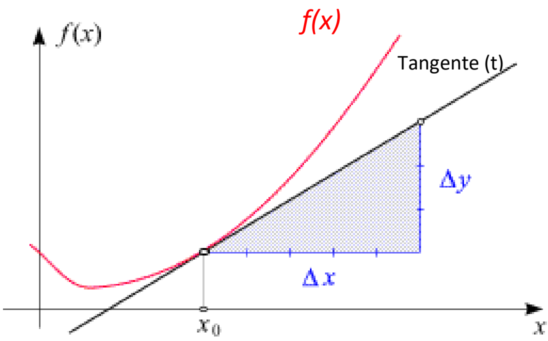


Fred Mold

Dieser kleine Exkurs wurde von mir in Eigenregie und durch eigene Überlegungen verfasst. Das heißt, dass ich nicht einfach von irgendwoher einfach etwas abschreibe, sondern mir selber Gedanken und Überlegungen darüber mache und meine gewonnenen Erkenntnisse bzw. Erlebnisse (gemäß meinem Stand der Erkenntnis) niederschreibe. Mit dieser Methode lernt und versteht man meiner Meinung nach auch am meisten. Diese Methode macht auch mehr Freude.

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Was ist Differenzieren?



Beim **Differenzieren** tut man nichts anderes, als bei einer beliebigen Funktion *f(x)* an einem beliebigen Punkt x_0 die Steigung der Tangente zu berechnen. In der Skizze nebenan wäre die Steigung der Tangente (t) im Punkt x_o = $\frac{3}{5}$ ($k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$).

Die Steigung der Tangente *k* kennen wir bereits von der **Linearen Funktion**. Sie lautet: $f(x) = k \cdot x + d$, wobei $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ der so genannte **Differenzenquotient** ist. Wird nun das Verhältnis $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ unendlich klein, so spricht man vom so genannten **Differenzialquotient** $k = \frac{dy}{dx}$ bzw. vom **Differenzial**. Bei der Ermittlung der Steigung *k* einer linearen Funktion genügt, dass man den Differenzwertwert der y- Koordinaten (Δy) durch den Differenzwert der x- Koordinaten (Δx) dividiert. Siehe auch das Kapitel: **Lineare Funktionen**!

Handelt es sich um eine nicht lineare Funktion, so benötigt man zur Berechnung von *k* die **Differenzialrechnung**, wobei jede Funktion mit speziellen **Differenzialregeln** zu berechnen ist.

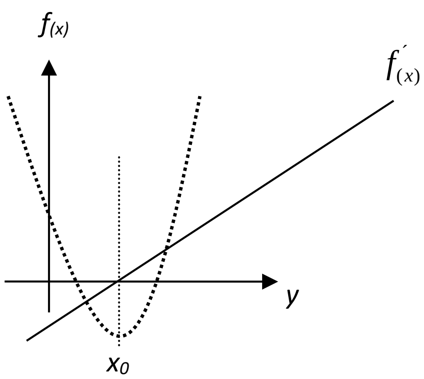
Also: Beim Differenzieren ($f'_{(x)}$) ermittelt man immer die Steigung der Tangente der Funktion ($f_{(x)}$).

Die Ableitung wird mit einen Strich oberhalb ´ gekennzeichnet.

$$\textbf{Definition:}\quad f'_{(x)} = k_{(x)} = \frac{dy}{dx}$$

Auch die Ableitung $f'_{(x)}$ bzw. die Ableitungen $f''_{(x)}$ sind charakteristische Funktionen, die auch gezeichnet werden kann.

Beispiel:



Die Grundfunktion $f_{(x)}$ in diesem Beispiel ist eine Parabel. Die erste Ableitung dazu ist eine lineare Funktion. An einer beliebigen Stelle x_0 können wir an der Funktion einen Wert (y- Wert) ablesen.

Dieser abgelesene Wert entspricht dem Wert der Steigung *k* der Funktion $f_{(x)}$ an der Stelle x_0.

Aus diesen Zusammenhängen ergibt sich dann das Kapitel **Kurvendiskussionen**!

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Differenzialregeln

Allgemeine Regeln, mit denen man zum Großteil über die Runden kommt.

Ich kann empfehlen, dass man diese Regeln auswendig lernt.

Nr.	Stammfunktion *y* bzw. $f_{(x)}$	1. Ableitung *y´* bzw. $f'_{(x)}$
1	$f_{(x)=C}$ Wobei *c* für einen beliebigen Zahlenwert (reelle Zahl) steht	$f'_{(x)} = 0$ Wird eine Konstante abgeleitet, so ergibt sich immer als Lösung 0!
2	$f_{(x)} = c_1 \cdot x^{c_2}$ Wobei c_1 und c_2 für beliebige Zahlenwerte (reelle Zahl bzw. Konstanten) stehen können	$f'_{(x)} = c_2 \cdot c_1 \cdot x^{c_2 - 1}$
3	$f_{(x)} = (T)^{c_1}$ - Potenzregel Wobei *T* einen beliebigen Term darstellt	$f'_{(x)} = c_1 \cdot (T)^{c_1 - 1} \cdot T'$ *T´* nennt man die so genannte **»Innere Ableitung«**
4	$f_{(x)} = (T_1) \cdot (T_2)$ - Produktregel Wobei T_1 und T_2 beliebige Terme darstellen	$f'_{(x)} = (T_1)' \cdot (T_2) + (T)_1 \cdot (T_2')$
5	$f_{(x)} = \frac{T_1}{T_2}$ - Quotienten Regel Wobei T_1 und T_2 beliebige Terme darstellen	$f'_{(x)} = \frac{T_1' \cdot T_2 - T_1 \cdot T_2'}{T_2^2}$
6	$f_{(x)} = \sin x$	$f'_{(x)} = \cos x$
7	$f_{(x)} = \cos x$	$f'_{(x)} = -\sin x$
8	$f_{(x)} = \sin(T)$ Wobei T einen beliebigen Term darstellt	$f'_{(x)} = \cos(T) \cdot T'$
9	$f_{(x)} = \cos(T)$ Wobei T einen beliebigen Term darstellt	$f'_{(x)} = -\sin(T) \cdot T'$
10	$f_{(x)} = c_1 \cdot e^x$	$f'_{(x)} = c_1 \cdot e^x$ Wird diese Funktion abgeleitet, so bleibt sie gleich

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

11	$f_{(x)} = c_1 \cdot e^T$	$f_{(x)} = c_1 \cdot e^T \cdot T'$
12	$f_{(x)} = c_1 \cdot \ln\lvert x\rvert$	$f'_{(x)} = c_1 \cdot \frac{1}{x}$
14	$f_{(x)} = c_1 \cdot \ln\lvert(T)\rvert$	$f'_{(x)} = c_1 \cdot \frac{1}{T} \cdot T'$
15	$f_{(x)} = \tan x$	$f'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$
16	$f_{(x)} = \tan(T)$	$f'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2(T)} \cdot T'$
17	$f_{(x)} = c_1 \cdot \frac{1}{x}$	$f'_{(x)} = -c_1 \cdot \frac{1}{x^2}$

Weitere Regeln können meist mit Hilfe dieser Regeln erstellt werden. Beispiele dafür folgen später auf Seite 11!

Die Herleitung dieser Regeln geschieht mit Hilfe des uns bereits bekannten Differenzenquotienten durch Grenzwertbildung. Wir werden und an dieser Stelle nur am Rande damit beschäftigen.

Der **Differenzenquotient** $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ kann ja auch anders ausgedrückt werden, nämlich mit:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ bzw. } = \frac{f_{(x)} - f_{(x_0)}}{x_2 - x_1}$$

Nun bilden wir den Grenzwert ($\Delta x \to 0 \; bzw. \; x \to x_0$): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x)} - f_{(x_0)}}{x_2 - x_1}$ und können damit ebenso differenzieren bzw. unsere Differenzialregeln damit herleiten. Klingt etwas kompliziert, ist aber im Grunde genommen ganz einfach.

Beispiel gefällig?

Die Funktion $f_{(x)} = x^2 + 3x$ ist an der Stelle $x_0 = 5$ zu differenzieren!

$$f_{(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_{(x)} - f_{(x_0)}}{x_2 - x_1} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + 3x - (x_0^2 + 3x_0)}{x_2 - x_1} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2 + 3(x - x_0)}{x_2 - x_1} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + 3(x - x_0)}{x_2 - x_1} =$$

$x_0 + x_0 + 3 = 2x_0 + 3$ (daraus ergibt sich eben Regel 1)

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Beispiele zum »Aufwärmen«

$f_{(x)} = 2$, $f'_{(x)} = ?$ oder $f_{(x)} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[5]{6}}$, $f'_{(x)} = ?$ oder $f_{(x)} = 2 \cdot e^{-0,8}$, $f'_{(x)} = ?$ oder…

Hier handelt es sich jeweils um Konstanten *c*. Die 1. Ableitung wird mit Regel $_1$ bewerkstelligt, die sagt, dass die **1. Ableitung einer Konstanten immer = 0** ist. In allen drei Beispielen ist die Lösung für: $f'_{(x)} = 0$!

$f_{(x)} = 2x$, $f'_{(x)} = ?$ oder $f_{(x)} = \frac{x^2}{3 \cdot \sqrt[5]{6}}$, $f'_{(x)} = ?$ oder $f_{(x)} = 4 \cdot x^{-2,4}$, $f'_{(x)} = ?$ oder…

Hier benötigt man die Regel $_2$ zur Lösung der Differenziale.

Im 1. Fall lautet die Lösung: $f'_{(x)} = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$, da x^0 immer 1 ergibt (Potenzrechnung).

Im 2. Fall lautet die Lösung: $f'_{(x)} = x^{2-1} \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[5]{6}} = x \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[5]{6}}$, da der Ausdruck $\cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[5]{6}}$ eine Konstante c_1 darstellt.

Im 3. Fall lautet die Lösung: $f'_{(x)} = -2,4 \cdot 4 \cdot x^{-2,4-1} = -9,6x^{-3,4}$.

$f_{(x)} = (3x^2 - x)^4$, $f'_{(x)} = ?$

Hier benötigen wir die Regel $_3$ – Potenzregel:

$$f'_{(x)} = 4 \cdot \underbrace{(3x^2 - x)}_{\text{T}}{}^3 \cdot \underbrace{(6 \cdot x - 1)}_{\text{Innere Ableitung (T´)}}$$

Nebenrechnung:

$T = 3x^2 - x$
$T' = 2 \cdot 3x^{2-1} - 1 \cdot x^{1-1} = 6x - 1$

$f_{(x)} = 2\ln|2x|$, $f'_{(x)} = ?$

Hier benötigen wir Regel $_{14}$.

$$f'_{(x)} = \frac{2}{2x} \cdot \underbrace{2}_{\text{Innere Ableitung von } 2x} = \frac{2}{x}$$

Tipp: Es ist gut, dass man zuallererst die einfachen Regeln übt, bevor wir uns über Regel $_4$ und $_5$ stürzen!

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Zusammenhängende Beispiele zu den Differenzialregeln

Beispiel1

$$f_{(x)} = 2x^3 - 2x^2 - x + 1,\ f'_{(x)} = ?$$

Hier handelt es sich um ein typisches Polynom 3. Grades, da hier der Exponent in der höchsten Form zur 3. Potenz vorkommt.

Anmerkung:

Der Grad der höchsten Potenz = Grad des Polynoms. Kommt z.B. als höchste Potenz 4 vor, so handelt es sich um ein Polynom 4. Grades.

Tipp:

Manchmal lässt sich das Ausgangspolynom bzw. Term noch etwas vereinfachen oder umformen. Man kann sich so manchmal viel Arbeit ersparen. Ein späteres Beispiel (Beispiel4) soll dies veranschaulichen.

Die einzelnen Glieder werden getrennt differenziert, wobei jedes Glied nach einer bestimmten Differenzialregel differenziert werden muss. Die Summenzeichen trennen die einzelnen Glieder.

$$f_{(x)} = \underbrace{2x^3}_{\text{1.Glied}} \underbrace{-2x^2}_{\text{2.Glied}} \underbrace{-x}_{\text{3.Glied}} \underbrace{+1}_{\text{4.Glied}}$$

Das 1., 2. und 3.Glied lässt sich mit Regel 2 lösen. Das 4.Glied mit Regel 1.

Daraus ergibt sich:

$$f'_{(x)} = \underbrace{3 \cdot 2 \cdot x^{3-1}}_{\text{1.Glied}} \underbrace{-2 \cdot 2 \cdot x^{2-1}}_{\text{2.Glied}} \underbrace{-1 \cdot x^{1-1}}_{\text{3.Glied}} \underbrace{+0}_{\text{4.Glied}}$$

Nun müssen wir den Term noch etwas vereinfachen (zusammenfassen, kürzen,...).

Dann folgt als Endresultat:

$$f'_{(x)} = 6x^2 - 4x \ -1$$

Anmerkung: Wird ein Polynom n- ten Grades differenziert, so ist die 1. Ableitung immer ein Polynom des Grades n-1, die 2. Ableitung ein Polynom des Grades n-2, usw.

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Beispiel2

$$f_{(x)} = 3 \cdot \frac{x^2}{(x-4)}, \quad f'_{(x)} = ?$$

Hier handelt es sich um einen Quotienten, da ein Bruch vorkommt. Zu allererst werden wir die Konstante 3, die vor dem Bruch steht, in den Zähler bringen:

$$f_{(x)} = \frac{3x^2}{(x-4)}$$

Nun wenden wir die Quotienten Regel (5) an, wobei T_1 dem Ausdruck, der im Zähler steht: $3x^2$ und T_2 dem Ausdruck, der im Nenner steht: *(x-4)* entspricht.

Eine kleine Nebenrechnung könnte helfen:

$T_1 = 3x^2$	$T_1' = 2 \cdot 3x^{2-1} = 6x$ (Auflösung mit Regel 2)
$T_2 = x - 4$	$T_2' = 1 - 0 = 1$ (Auflösung des 1. Gliedes (x) mit Regel 2. Das 2. Glied (4) mit Regel 1)

Die Quotienten Regel lautet:

$$f'_{(x)} = \frac{T_1' \cdot T_2 - T_1 \cdot T_2'}{T_2^2}$$

Nun brauchen wir nur mehr die berechneten Ausdrücke aus der Nebenrechnung einsetzen:

$$f'_{(x)} = \frac{6x \cdot (x-4) - 3x^2 \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{6x^2 - 24x - 3x^2}{x^2 - 8x + 16}$$

Durch weitere Vereinfachung erhalten wir:

$$f'_{(x)} = \frac{3x^2 - 24x}{(x^2 - 8x + 16)} = \frac{3x(x-8)}{(x^2 - 8x + 16)}$$

Tipp:

Bei der Vereinfachung kann man sehr leicht Fehler machen. Im Zweifelsfalle sollte man den Ausdruck nicht mehr weiter vereinfachen. Bei Hyperbelfunktionen kann manchmal auch eine Polynomdivision sinnvoll sein.

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Beispiel3:

$$f_{(x)} = \underbrace{\frac{x \cdot \cos x}{\ln|x|}}_{\text{1.Glied}} + \underbrace{3x^4}_{\text{2.Glied}}, \quad f'_{(x)} = ?$$

Man erinnere sich an **Beispiel1**, denn jedes einzelne Glied wird getrennt betrachtet und auch getrennt gelöst. In unserem Falle benötigen wir für das 1.Glied die Quotienten Regel (5) und für das 2.Glied die Regel 2.

Als Hilfe für Glied 1 bedienen wir uns wieder der Nebenrechnung:

$T_1 = x \cdot \cos x$	$T_1' = ?$ (Auflösung mit Regel 4 – Produktregel!) Die Produktregel lautet: $f'_{(x)} = (T_1)' \cdot (T_2) + (T_1) \cdot (T_2')$, wobei $T_1 = x$ und $T_2 = \cos x$ ist. $T_1' = 1$ (Regel 2) und $T_2' = -\sin x$ (Regel 7) Daraus folgt weiter die 1. Ableitung für den Ausdruck $T_1 = x \cdot \cos x$ ist $T_1' = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = \cos x - x\sin x$
$T_2 = \ln\|x\|$	$T_2' = \frac{1}{x}$ (Auflösung Regel 12)

Noch einmal die Quotienten Regel:

$$f'_{(x)} = \frac{T_1' \cdot T_2 - T_1 \cdot T_2'}{T_2^2}$$

Nun brauchen wir nur mehr die berechneten Ausdrücke aus der Nebenrechnung einsetzen:

$$f'_{(x)} = \frac{(\cos x - x\sin x) \cdot \ln|x| - x\cos x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2|x|} = \frac{(\cos x - x\sin x) \cdot \ln|x| - x\cos}{\ln^2|x|}$$

Wir beachten hier den Tipp aus **Beispiel2** und lassen den Ausdruck als Endlösung stehen.

Nun müssen wir noch das 2.Glied differenzieren und erhalten hierfür:

$$4 \cdot 3x^{4-1} = 12x^3$$

Das Ergebnis lautet somit: $f'_{(x)} = \frac{(\cos x - x\sin x) \cdot \ln|x| - x\cos}{\ln^2|x|} + 12x^3$

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Beispiel4

$$f_{(x)} = \frac{x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sqrt[6]{(x^2)}}$$

Dieser Ausdruck lässt sich sehr leicht vereinfachen, da laut der **Trigonometrie** der Ausdruck $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist (Winkelfunktionen am Einheitskreis). Hier sieht man, dass für das Differenzieren eine große Grundkenntnis der Mathematik notwendig ist. Differenzieren ist an sich sehr leicht. Aber was sich dahinter versteckt (Rechnen mit Termen, Funktionen, Trigonometrie, Potenzrechnung, Bruchrechnen,…) ist relativ viel. Hat man Probleme mit dem Differenzieren, so liegt es meist daran, dass oben aufgezählte Fachbereiche nicht richtig sitzen, wobei die Potenzrechnung dabei ganz wichtig ist.

Der Ausdruck lautet somit:

$f_{(x)} = \frac{x \cdot 1}{\sqrt[6]{(x^2)}}$, wobei der Nenner $\sqrt[6]{x^2}$ auch als $x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}}$ dargestellt werden kann.

Wir bekommen nun:

$f_{(x)} = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}}$ als Ausdruck, welcher sich durch die Regeln der **Potenzrechnung** auf den Ausdruck $x^{1-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$ reduzieren lässt.

Nun braucht man nur mehr Regel 2 zum Differenzieren und Vereinfachen:

$$f'_{(x)} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

Anmerkung und Tipp:

Hat man Probleme mit dem Differenzieren, so tut es gut, sich die **Potenzrechnung** und das **Rechnen mit Termen** sehr gut anzuschauen!

Wichtig ist primär das Verstehen dieser Regeln bzw. zu erkennen, welche Regel man braucht!

Wie würde die Lösung aussehen, wenn wir nicht fundierte Kenntnisse der elementaren Mathematik bzw. kausale Zusammenhänge zwischen den einzelnen Stoffgebieten hätten?

Dieses Beispiel könnte man dann auf zwei andere Arten lösen:

1. Mit der Produktregel – in unserem konkreten Fall noch etwas leichter

2. Mit der Quotienten Regel – in diesem Falle aufwendiger

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

1. Mit der Produktregel

Betrachten wir noch einmal die Ausgangsfunktion:

$$f_{(x)} = \frac{x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Nun bedienen wir uns der **Potenzrechnung** und machen aus einem Quotienten ein Produkt:

Zur Erinnerung: $\frac{1}{x^n} \Leftrightarrow x^{-n} \Rightarrow \frac{x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{x^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot x^{-\frac{1}{3}}$, wobei der Ausdruck: x und $x^{-\frac{1}{3}}$ ausmultipliziert werden kann.

Man erhält dann: $x \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{1-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$.

Somit ist der Ausdruck $\frac{x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{x^{\frac{1}{3}}}$ dasselbe wie: $x^{\frac{2}{3}} \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Nun wenden wir die Produktregel an, wobei T_1 dem Ausdruck $x^{\frac{2}{3}}$ entspricht und T_2 dem Ausdruck $\sin^2 x + \cos^2 x$ entspricht. Nun werden wir wieder eine kleine Nebenrechnung machen:

$T_1 = x^{\frac{2}{3}}$	$T_1' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$ (Regel 2)
$T_2 = \sin^2 x + \cos^2 x$	$T_2' = ?$ Welche Regel, da wir für die Ausdrücke $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ keine Regeln kennen?

Aus bekannten Regeln mach neue Regeln:

$\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$, wobei der Ausdruck $\sin x \cdot \sin x$ mit der Produktregel sehr leicht zu differenzieren ist:

$$(\sin^2 x)' = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$T_1 = \sin x$	$T_1' = \cos x$ (Regel 6)
$T_2 = \sin x$	$T_2' = \cos x$ (Regel 6)

Wir könnten dies nun als neue Regel mit der fortlaufenden Nummer 18 in unseren Differenzialregeln aufnehmen.

Ebenso erhalten wir aus: $(\cos^2 x)' = -\cos x \sin x - \sin x \cos x = -2 \sin x \cos x$. Was wir als Regel Nr. 19 übernehmen könnten.

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Nun lässt sich das Beispiel sehr leicht lösen:

$$(x^{\frac{2}{3}}\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x))' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)+x^{\frac{2}{3}}\underbrace{(2\sin x\cos x-2\sin x\cos x)}_{=0!}$$

Somit erhalten wir: $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)$ eine einfache Umformung ergibt dann:

$$f'_{(x)}=\frac{2\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)}{3\cdot x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\cdot\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{\text{=1! (s. Fachbereich Trigonometrie - Einheitskreis)}}$$

Dieser Ausdruck muss selbstverständlich völlig identisch mit dem Ausdruck zu Beginn von **Beispiel4** sein!

Anmerkung: Oft sehen die Ergebnisse sehr unterschiedlich aus. Aber durch Umformung müssen sie die selbigen Ergebnisse sein. Als Probe kann man einfach einen beliebigen Zahlenwert einsetzen.

2. Mit der Quotienten Regel

$f_{(x)}=\frac{x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)}{x^{\frac{1}{3}}}$ um $f'_{(x)}$ mit Hilfe der Quotienten Regel berechnen zu können, weisen wir T_1 dem Ausdruck $x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)$, und T_2 *den Ausdruck* $x\frac{1}{3}$ zu.

Nebenrechnung:

<table>
<tr><td>$T_1 = x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)$</td><td>$T_1' = ?$ Die Differenzierung von T_1 erfolgt wieder mit der Produktregel:
<table>
<tr><td>$T_{11}=x$</td><td>$T_{11}'=1$</td></tr>
<tr><td>$T_{21}=\sin^2 x+\cos^2 x$</td><td>$T_{21}'=2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=0$</td></tr>
</table>
Daraus folgt:
$T_1'=T_{11}'\cdot T_{21}+T_{21}'\cdot T_{11}=1\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)+0\cdot x=\sin^2 x+\cos^2 x$</td></tr>
<tr><td>$T_2=x^{\frac{1}{3}}$</td><td>$T_2'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}$ (Regel 2)</td></tr>
</table>

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Nun ergibt sich durch Einsetzung in die Quotienten Regel:

$$f'_{(x)}=\frac{T_1'\cdot T_2-T_1\cdot T_2'}{T_2^2}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot x^{\frac{1}{3}}-x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=$$

$$\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot x^{\frac{1}{3}}-(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}}=(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot(x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}})\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\cdot\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{=1!}$$

Alle drei Ergebnisse sind gleich! Das freut uns, wobei mir andere Dinge – wohl bemerkt, dass ich gerne Mathematik unterrichte – mehr Freude bereiten.

Ja, ich könnte ja förmlich stolz auf meine bescheidenen Mathematikkenntnisse sein, wiewohl über diese Betrachtungen ein echter Mathematiker schmunzeln würde.

Tipp: Es ist gut, dass man etwas einfachere Beispiele auf diese verschiedene Arten zu lösen versucht, da es auch eine sehr gute Übung ist.

Man könnte auch tabellarisch arbeiten: Beispiel: $f_{(x)}=\frac{9-x^2}{3+x}$

Mit Kausalität:	Mit Produktregel:	Mit Quotienten Regel:
$9-x^2=(3+x)\cdot(3-x)$ =Binom´sche Formel! $\Rightarrow\frac{(3+x)\cdot(3-x)}{(3+x)}\Rightarrow$ $\Rightarrow(3-x)$ Jetzt muss nur der Ausdruck *(3-x)* abgeleitet werden: $\Rightarrow(3-x)'=-1$	$(9-x^2)\cdot(3+x)^{-1}$ $T_1=(9-x^2)$ | $T_1'=-2x$ $T_2=(3+x)^{-1}$ | $T_2'=-(3+x)^{-2}$ $f'_{(x)}=-(9-x^2)\cdot(3+x)^{-2}-$ $2x\cdot(3-x)^{-1}=-\frac{(9-x^2)}{(3+x)^2}-\frac{2x}{(3-x)}=$ $=-\frac{(9-x^2)-2x\cdot(3-x)}{(3+x)^2}=$ $=-\frac{9-x^2-6x+2x^2}{9+6x+x^2}=-1$	$T_1=(9-x^2)$ | $T_1'=-2x$ $T_2=(3+x)$ | $T_2'=1$ $f_{(x)}=\frac{-2x\cdot(3+x)-(9-x^2)\cdot 1}{(3+x)^2}=$ $=\frac{-6x-2x^2-9+x^2}{9+6x+x^2}=$ $-\frac{9+6x+x^2}{9+6x+x^2}=-1$

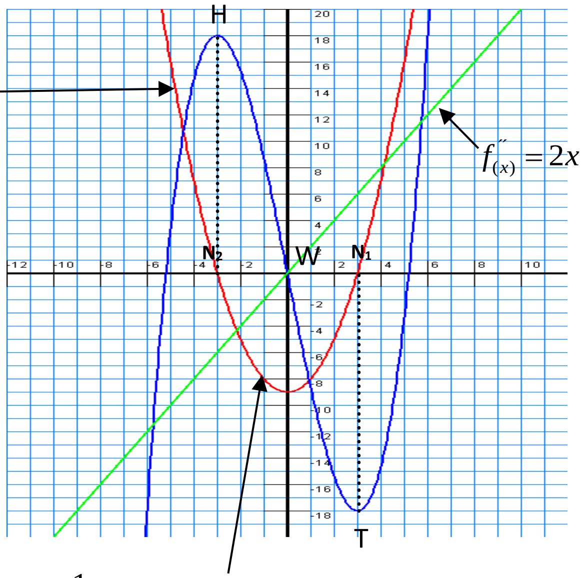
Alle drei Lösungen müssen natürlich gleich sein!

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

Ein weiteres Beispiel als Überleitung zu den Kurvendiskussionen

Schauen wir uns einmal folgende Funktion an:

$$f_{(x)}=\frac{1}{3}x^3-9x$$



Es handelt sich um ein Polynom 3. Grades, welches nebenbei dargestellt ist. Polynome 3. Grades sehen meist so ähnlich aus wie dieses hier. Man sieht auch dem Graphen (hier Ermittlung mittels Wertetabelle, sonst mittels Newton-Verfahren), dass es 3. Nullstellen (Höchster Grad der Potenz = maximal mögliche Nullstellen), 2 Extremwerte: Einen **Hochpunkt** (H) und einen **Tiefpunkt** (T) besitzt. Die Extremwerte sind generell einen Grad geringer, wie der Grad des Polynoms. In unserem Falle: 2.

Nun betrachten wir die 1. Ableitung der Funktion: $f'_{(x)}=3\cdot\frac{1}{3}x^2-9=x^2-9$

Es handelt sich um eine **Quadratische Funktion** bzw. um eine **Parabel**. Eine Parabel ist ein Polynom 2. Grades und weist somit maximal 2 Nullstellen (N_1 und N_2) auf. Auffallend ist, dass die x- Koordinaten der Nullstellen genau über den Extremwerten der Funktion liegen. Dort, wo $f'_{(x)}$ die Nullstellen besitzt, liegen Hoch- u. Tiefpunkt der Funktion. Man sieht auch aus dem Graphen, dass an der Stelle, wo die Steigungen der Tangenten von $f_{(x)}$ 0 sind, Hoch- bzw. und Tiefpunkt sind. Auch erkennt man, dass der abgelesene Wert die Funktion der 2. Ableitung darauf schließen lässt, ob es sich um einen Hoch- bzw. um einen Tiefpunkt handelt. H: $f''_{(x)}<0$ bzw. T: $f''_{(x)}>0$.

Also: $f'_{(x)}=k=0\Rightarrow$ Berechnung von **H** u. **T**.

Wenn wir nun noch die 2. Ableitung: $f''_{(x)}=2x$ ansehen (erhalten wir, indem wir $f'_{(x)}$ ableiten), dann sehen wir, dass diese Funktion eine **Geradengleichung** ist, welche ihre Nullstelle genau dort besitzt, wo $f_{(x)}$ ihren Wendepunkt (**W**) hat. Dass dies hier ausgerechnet im Ursprung ist, ist reiner Zufall.

Also gilt weiter: $f''_{(x)}=0\Rightarrow$ Berechnung des Wendepunktes **W**.

Tipp: Die Kurvendiskussion (von Polynomen n-ten Grades zumindest) ist ein *„relativ“* leichtes Kapitel. Enorme Hilfe erfährt man, wenn man den Graphen zeichnet, da ein Bild weit mehr Aussagekraft besitzt, als eine Formel. Viele Taschenrechner bieten diese Option. Oder man verwende ein PC Tool, wie GeoGebra zum Beispiel. Die Erstellung einer Wertetabelle kann niemals schaden, da dies auch gleichzeitig eine gute (Rechen)Übung ist.

www.nachhilfe-fred.at
Weigunystr.3 - 4040 Linz
office@nachhilfe-fred.at
0650 84 94 552

ganz kurz zusammengefasst, was wir aus der Grafik von Seite 13 erkennen können:

$f_{(x)} = 0$	→**Nullstelle(n)**	
$f'_{(x)} = 0$	→**Extremwert€**	$f''_{(x)} < 0$ →**Hochpunkt(e)** $f''_{(x)} > 0$ →**Tiefpunkt (e)**
$f''_{(x)} = 0$	→**Wendepunkt(e)**	**Das ist der Punkt, wo die Krümmung ($f''_{(x)}$) eben den Wert 0 besitzt bzw. Wo sich die Krümmung wendet**

Bei Funktionen anders Typs, zum Beispiel bei Hyperbelfunktionen, ist es ganz wichtig, dass wir nebst Nullstellen, Extremwerten und Wendepunkten auch den Wertebereich (z.B.: Definitionsmenge -> Asymptoten) sowie das Grenzwertverhalten betrachten. D.h.: Wie verhält sich die Funktion bei x=$\pm\infty$? Dies geschieht allgemein mit der Grenzwertbildung ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_{(x)}$ …), wobei bei komplizierteren bzw. verknüpften Funktionen die Regel von L'Hospital eine sehr wichtige Rolle spielt.

Wichtig dabei ist, dass man sich das Polynom vorab einmal ansieht und sich die Frage stellt: Welche Funktion kann das überhaupt sein bzw. lässt sich der vorliegende Funktionsterm ev. vereinfachen?

Ich empfehle generell diese Reihenfolge bzw. Vorgehensweise, wobei der 1. Punkt der wichtigste Punkt von allen Punkten ist:

1) ***Graph zeichnen (GeoGebra, Taschenrechner, Wertetabelle,…)***
2) ***Definitionsbereich anschauen***
3) ***Grenzwertverhalten bzw. Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten***
4) ***Nullstellen und Achsenschnittpunkt (x=0) - falls überhaupt vorhanden - ermitteln***
5) ***Extremwerte ermitteln***
6) ***Wendepunkte ermitteln***

Haben wir eine etwas kompliziertere Funktion vor uns, wo es mehrere Definitionsbereiche zu ermitteln gibt (s. Beispiel unten), so empfiehlt es sich, die einzelnen Definitionsmengen auf einem Zahlenstrahl anschaulich darzustellen, um leichter zu erkennen, was nun die durchschlagende Definitionsmenge ist.

Bsp.: $f_{(x)} = \frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x-1}}$ besitzt mehrere Definitionsbereiche, denn zunächst darf ja der Ausdruck im *ln* nicht negativ oder null werden: $x - 2 > 0 \to x > 2$, dann der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ: $x - 1 \geq 0 \to x \geq 1$ sowie der Ausdruck im Nenner nicht 0 werden: $\sqrt{x-1} \neq 0 \to x \neq 1$. Wir bekommen hier mehrere Lösungen, wobei nur eine Lösung, nämlich $\boldsymbol{x > 2}$ für die ganze Funktion gilt.